Les mesures de risque

Aline Goulard

Département de Mathématique
Université de Mons

UMONS

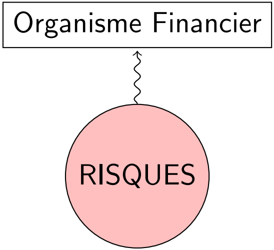
Faculté
des Sciences

2 mars 2018

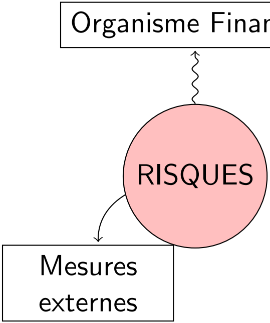
Introduction

Organisme Financier

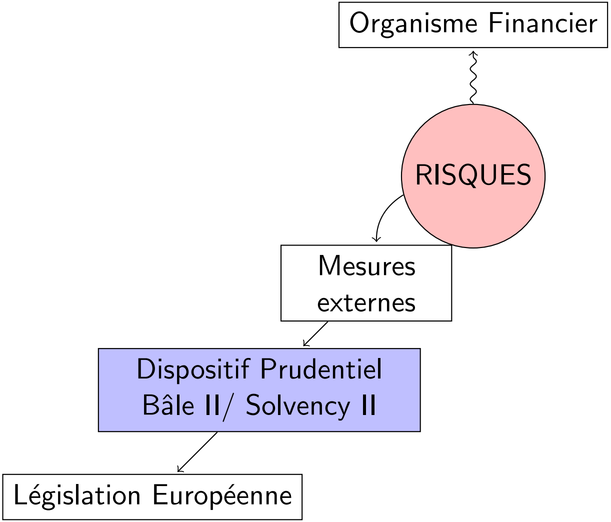
Introduction



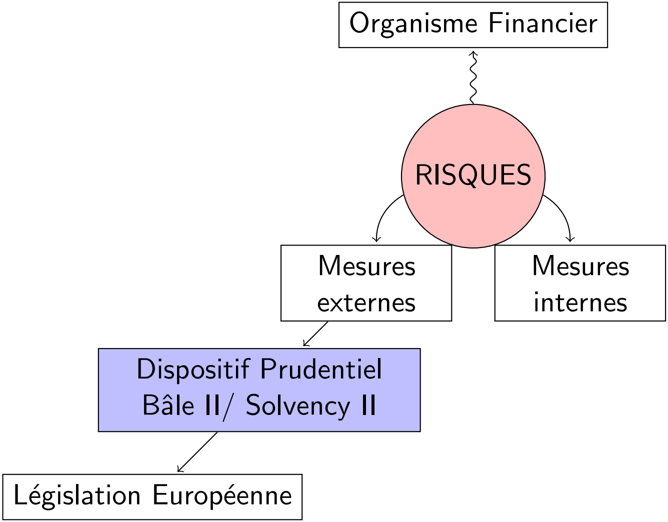
Introduction



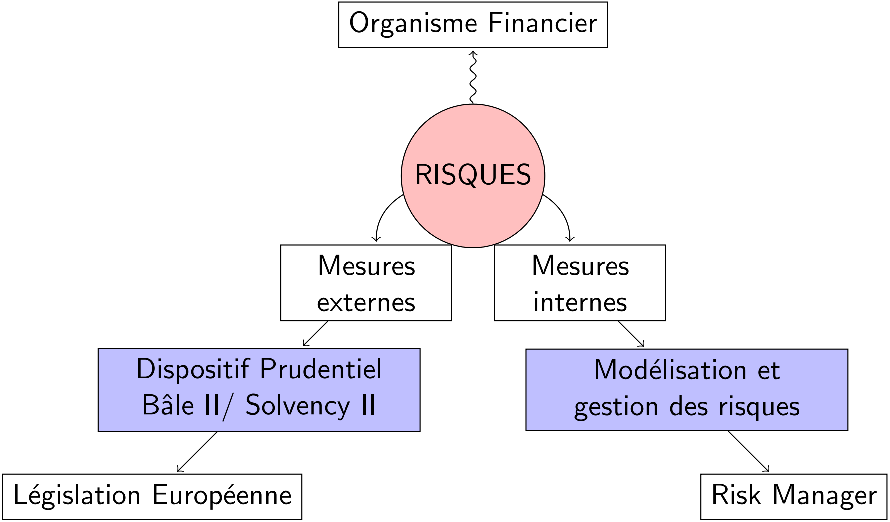
Introduction



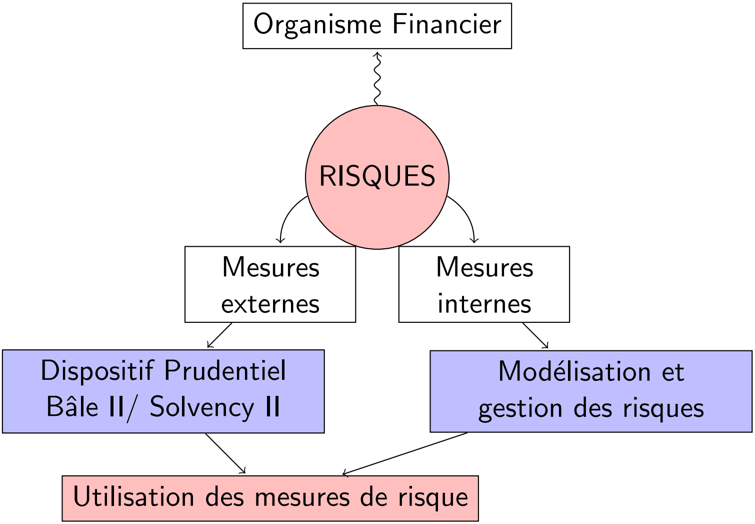
Introduction



Introduction



Introduction



Introduction

Plusieurs questions se posent :

- Comment **définir** un risque ?

Introduction

Plusieurs questions se posent :

- Comment **définir** un risque ?
- Comment **évaluer** un risque ?

Introduction

Plusieurs questions se posent :

- Comment **définir** un risque ?
- Comment **évaluer** un risque ?
- Que signifie **bien mesurer** un risque ?

Introduction

Plusieurs questions se posent :

- Comment **définir** un risque ?
- Comment **évaluer** un risque ?
- Que signifie **bien mesurer** un risque ?
- Comment **construire** une bonne mesure de risque ?

Le risque

Un risque représente l'incertitude sur la valeur future d'une donnée actuelle.

Définition

Soit $(\Omega, \mathcal{A})$ un espace mesurable. **Un risque** X sur Ω est une variable aléatoire réelle.

Pour $\omega \in \Omega$ et X un risque, on considère que

$$\boxed{\begin{array}{c} X(\omega) > 0 \rightarrow \textbf{une perte} \\ X(\omega) \leqslant 0 \rightarrow \text{un gain} \end{array}}$$

Mesures de risque

Définition

Soit $(\Omega, \mathcal{A})$ un espace mesurable et $\mathcal{X}$ un ensemble de variables aléatoires réelles sur Ω contenant les constantes. On appelle **mesure de risque**, une application

$$\rho : \mathcal{X} \to \mathbb{R}.$$

L'espérance, la variance, et l'écart-type sont des mesures de risque.

Mesures de risque

Définition

Soit $(\Omega, \mathcal{A})$ un espace mesurable et $\mathcal{X}$ un ensemble de variables aléatoires réelles sur Ω contenant les constantes. On appelle **mesure de risque**, une application

$$\rho : \mathcal{X} \to \mathbb{R}.$$

L'espérance, la variance, et l'écart-type sont des mesures de risque.

Question : Qu'est-ce qu'une bonne mesure de risque ?

1 Introduction

2 Les mesures de risque

3 Une bonne mesure de risque
- Les mesures de risque cohérentes
- Les mesures de risque convexes
- Les mesures de risque spectrales

4 Une mesure de risque cohérente.

5 Conclusion/pistes

Mesure de risque cohérente

Définition

Soit $\mathcal{X}$ un espace linéaire de variables aléatoires réelles qui contient les constantes. Une mesure de risque $\rho : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ est **cohérente** si les propriétés suivantes sont vérifiées :

1. Soient X, $Y \in \mathcal{X}$, si $X \leqslant Y$ p.s. alors $\rho(X) \leqslant \rho(Y)$ (Monotonicité).
2. Soient $X \in \mathcal{X}$ et $b \in \mathbb{R}$, on a $\rho(X + b) = \rho(X) + b$ (Invariance par translation).
3. Soient $X \in \mathcal{X}$ et $c \geqslant 0$, on a $\rho(cX) = c\rho(X)$ (Homogénéité positive).
4. Soient X, $Y \in \mathcal{X}$, on a $\rho(X + Y) \leqslant \rho(X) + \rho(Y)$ (Sous-additivité).

L'espérance est une mesure de risque cohérente.

Value at Risk

Définition

La **Value at Risk** de niveau $0 < \alpha < 1$, notée VaR_α, est pour X une variable aléatoire réelle

$$VaR_\alpha(X) = F_X^{-1}(\alpha) = \inf\{a|\mathbb{P}(X \leqslant a) \geqslant \alpha\},$$

où F_X^{-1} est appelé l'inverse généralisé.

Value at Risk

Définition

La **Value at Risk** de niveau $0 < \alpha < 1$, notée VaR_α, est pour X une variable aléatoire réelle

$$VaR_\alpha(X) = F_X^{-1}(\alpha) = \inf\{a | \mathbb{P}(X \leqslant a) \geqslant \alpha\},$$

où F_X^{-1} est appelé l'inverse généralisé.

Remarque

La Value at Risk n'est pas cohérente car elle n'est pas sous-additive.

Value at Risk

Soient w_i, où $i = 1, 2, 3$, trois situations équiprobables, X_1 et X_2 représentant les risques suivants.

	X_1	X_2	$X_1 + X_2$
w_1	150	10	160
w_2	10	150	160
w_3	-200	-200	-400

$$VaR_{0.66}(X_1) = 10 = VaR_{0.66}(X_2),$$

$$VaR_{0.66}(X_1 + X_2) = 160.$$

$$VaR_{0.66}(X_1 + X_2) = 160 > 20 = VaR_{0.66}(X_1) + VaR_{0.66}(X_2).$$

Les mesures de risque convexes

Définition

Soit $\mathcal{X}$ un espace linéaire de variables aléatoires réelles qui contient les constantes. Une mesure de risque $\rho : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ est **convexe** si les propriétés suivantes sont vérifiées :

1. Soient $X, Y \in \mathcal{X}$, si $X \leqslant Y$ p.s. alors $\rho(X) \leqslant \rho(Y)$ (Monotonicité).
2. Soient $X \in \mathcal{X}$ et $b \in \mathbb{R}$, on a $\rho(X + b) = \rho(X) + b$ (Invariance par translation).
3. Soient $X, Y \in \mathcal{X}$ et $\lambda \in [0, 1]$, on a $\rho(\lambda X + (1 - \lambda)Y) \leqslant \lambda\rho(X) + (1 - \lambda)\rho(Y)$ (convexité).

Les mesures de risque convexes

Proposition

Soit $\mathcal{X}$ un espace linéaire de variables aléatoires réelles qui contient les constantes et $\rho : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ une mesure de risque positivement homogène. On a que ρ est sous-additive si et seulement si ρ vérifie la propriété de convexité.

Les mesures de risque convexes

Proposition

Soit $\mathcal{X}$ un espace linéaire de variables aléatoires réelles qui contient les constantes et $\rho : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ une mesure de risque positivement homogène. On a que ρ est sous-additive si et seulement si ρ vérifie la propriété de convexité.

$\Rightarrow$ Toute mesure de risque cohérente est convexe.

Les mesures de risque convexes

Proposition

Soit $\mathcal{X}$ un espace linéaire de variables aléatoires réelles qui contient les constantes et $\rho : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ une mesure de risque positivement homogène. On a que ρ est sous-additive si et seulement si ρ vérifie la propriété de convexité.

$\Rightarrow$ Toute mesure de risque cohérente est convexe.

Définition

Soit $\beta > 0$. La mesure de risque exponentielle est pour toute v.a.r. X telle que $e^{\beta X}$ est intégrable

$$\rho^{exp}(X) = \frac{1}{\beta} \ln(E(e^{\beta X})).$$

Cette mesure de risque est convexe et non cohérente.

Les mesures de risque convexes

Remarque

La Value at Risk n'est pas convexe car on n'a pas que

$$\forall X,\ Y \in \mathcal{X},\ \forall \lambda \in [0,1],\ \rho(\lambda X + (1-\lambda)Y) \leqslant \lambda\rho(X) + (1-\lambda)\rho(Y).$$

Les mesures de risque convexes

Remarque

La Value at Risk n'est pas convexe car on n'a pas que

$$\forall X,\ Y \in \mathcal{X},\ \forall \lambda \in [0,1],\ \rho(\lambda X + (1-\lambda)Y) \leqslant \lambda\rho(X) + (1-\lambda)\rho(Y).$$

En effet, pour $X,\ Y \sim \mathcal{B}(1, 0.02)$ indépendantes, on a pour $\lambda = \frac{1}{2}$

$$VaR_{0.975}(X) = VaR_{0.975}(Y) = 0.$$

De plus,

$$\mathbb{P}\left(\frac{1}{2}(X+Y) \leqslant 0\right) = \mathbb{P}(X = 0 \text{ et } Y = 0) = 0.98 * 0.98 = 0.9604.$$

Donc

$$VaR_{0.975}\left(\frac{1}{2}(X+Y)\right) > 0 = \frac{1}{2}VaR_{0.975}(X) + \frac{1}{2}VaR_{0.975}(Y).$$

Les mesures de risque spectrales

Définition

Deux v.a.r. X et Y sont **comonotones** si pour tout ω_i, $\omega_j \in \Omega$ tels que $P(\Omega) = 1$

$$(X(\omega_i) - X(\omega_j))(Y(\omega_i) - Y(\omega_j)) \geqslant 0.$$

Les mesures de risque spectrales

Définition

Deux v.a.r. X et Y sont **comonotones** si pour tout ω_i, $\omega_j \in \Omega$ tels que $P(\Omega) = 1$

$$(X(\omega_i) - X(\omega_j))(Y(\omega_i) - Y(\omega_j)) \geqslant 0.$$

Soient w_i, où $i = 1, 2, 3$, trois situations équiprobables, X_1, X_2 et X_3 représentant les risques suivants.

	X_1	X_2	X_3
w_1	2	3	-4
w_2	0	-1	-1
w_3	-3	-4	3

X_1 et X_2 sont comonotones.
X_1 et X_3 (ou X_2 et X_3) ne sont pas comonotones.

Les mesures de risques spectrales

Définition

Soit $\mathcal{X}$ un espace linéaire de variables aléatoires réelles qui contient les constantes. Une mesure de risque $\rho : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ est **spectrale** si les propriétés suivantes sont vérifiées :

1. Soient $X, Y \in \mathcal{X}$, si $X \leqslant Y$ p.s. alors $\rho(X) \leqslant \rho(Y)$.
2. Soient $X \in \mathcal{X}$ et $b \in \mathbb{R}$, on a $\rho(X + b) = \rho(X) + b$ (Invariance par translation).
3. Soient $X \in \mathcal{X}$ et $c \geqslant 0$, on a $\rho(cX) = c\rho(X)$ (Homogénéité positive).
4. Soient $X, Y \in \mathcal{X}$, on a $\rho(X + Y) \leqslant \rho(X) + \rho(Y)$ (Sous-additivité).
5. Pour tout $X, Y \in \mathcal{X}$ comonotones, $\rho(X + Y) = \rho(X) + \rho(Y)$.

Les mesures de risques spectrales

Définition

Soit $\mathcal{X}$ un espace linéaire de variables aléatoires réelles qui contient les constantes. Une mesure de risque $\rho : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ est **spectrale** si les propriétés suivantes sont vérifiées :

1. Soient $X, Y \in \mathcal{X}$, si $X \leqslant Y$ p.s. alors $\rho(X) \leqslant \rho(Y)$.
2. Soient $X \in \mathcal{X}$ et $b \in \mathbb{R}$, on a $\rho(X + b) = \rho(X) + b$ (Invariance par translation).
3. Soient $X \in \mathcal{X}$ et $c \geqslant 0$, on a $\rho(cX) = c\rho(X)$ (Homogénéité positive).
4. Soient $X, Y \in \mathcal{X}$, on a $\rho(X + Y) \leqslant \rho(X) + \rho(Y)$ (Sous-additivité).
5. Pour tout $X, Y \in \mathcal{X}$ comonotones, $\rho(X + Y) = \rho(X) + \rho(Y)$.

Remarque

La Value at Risk n'est pas spectrale.

Les mesures de risques spectrales

Proposition

Soit $\rho : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ une mesure de risque spectrale et X, $Y \in \mathcal{X}$. La non-comonotonicité entre X et Y est une condition nécessaire pour que pour tout $\lambda \in [0, 1]$

$$\rho(\lambda X + (1 - \lambda)Y) < \lambda\rho(X) + (1 - \lambda)\rho(Y).$$

Voir Exemple précédent : Soit ρ une mesure de risque spectrale, alors on remarque que

1. Pour tout $\lambda \in [0, 1]$, $\rho(\lambda X_1 + (1 - \lambda)X_2) = \lambda\rho(X_1) + (1 - \lambda)\rho(X_2)$.
2. Pour tout $\lambda \in [0, 1]$, $\rho(\lambda X_1 + (1 - \lambda)X_3) \leqslant \lambda\rho(X_1) + (1 - \lambda)\rho(X_3)$. De plus, pour tout $\lambda \in \left[\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right]$, le portefeuille $\lambda X_1 + (1 - \lambda)X_3$ donne un gain quelle que soit la situation.

Fonctions de Young

Définition

On dit qu'une fonction $\Phi : [0, +\infty[\to [0, +\infty[$ est une **fonction de Young** si Φ est convexe, $\Phi(0) = 0$, et

$$\lim_{x \to +\infty} \Phi(x) = +\infty.$$

De plus, Φ est dite normalisée si $\Phi(1) = 1$.

Exemple : Les fonctions suivantes sont des fonctions de Young :

1. La fonction Φ_1 telle que $\Phi_1(x) = x$ pour tout $x \in [0, +\infty[$.
2. La fonction Φ_2 telle que $\Phi_2(x) = x^2$ pour tout $x \in [0, +\infty[$.
3. Pour $p \geqslant 1$, Φ_p telle que $\Phi_p(x) = x^p$ pour tout $x \in [0, +\infty[$.

Mesures de risque d'Orlicz

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité, on note

$$L^{\infty}_{+}(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}) = \{X : \Omega \to \mathbb{R} \text{ mesurable} | X \geqslant 0 \text{ p.s. et } \exists C > 0, |X| \leqslant C \text{ p.s.}\}.$$

Définition

Pour une fonction de Young Φ normalisée, **la mesure de risque d'Orlicz** de niveau $\alpha \in [0, 1[$, notée H_α, est, pour tout $X \in L^{\infty}_{+}(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$:

$$H_\alpha(X) = \inf \left\{ a > 0 | E\left[\Phi\left(\frac{X}{a}\right)\right] \leqslant 1 - \alpha \right\}.$$

Mesures de risque d'Orlicz

Exemple

Soit Φ telle que pour $p \geqslant 1$, $\Phi(x) = x^p$ pour tout $x \in [0, +\infty[$.
Pour $\alpha \in [0, 1[$ et $X \in L_+^\infty$:

$$\begin{aligned} H_\alpha(X) &= \inf\left\{a > 0 | E\left(\frac{X^p}{a^p}\right) \leqslant 1 - \alpha\right\} \\ &= \inf\left\{a > 0 | \frac{E(X^p)^{\frac{1}{p}}}{a} \leqslant (1-\alpha)^{\frac{1}{p}}\right\} \\ &= \left(\frac{E(X)}{1-\alpha}\right)^{\frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

Mesures de risque d'Orlicz

Proposition

Soit $\alpha \in [0, 1[$, on a

1. H_α est bien une mesure de risque.
2. H_α est invariante en loi.
3. Pour $c \in]0, +\infty[$, $H_\alpha(c) = \frac{c}{\Phi^{-1}(1-\alpha)}$.
4. Pour tout X, $Y \in L^\infty_+$, $H_\alpha(X + Y) \leqslant H_\alpha(X) + H_\alpha(Y)$.
5. Pour tout $c \geqslant 0$, $X \in L^\infty_+$, $H_\alpha(cX) = cH_\alpha(X)$.
6. Pour tout X, $Y \in L^\infty_+$, si $X \geqslant Y$ p.s. alors $H_\alpha(X) \geqslant H_\alpha(Y)$.

Mesures de risque d'Orlicz

Proposition

Soit $\alpha \in [0,1[$, on a

1. H_α est bien une mesure de risque.
2. H_α est invariante en loi.
3. Pour $c \in]0,+\infty[$, $H_\alpha(c) = \frac{c}{\Phi^{-1}(1-\alpha)}$.
4. Pour tout X, $Y \in L_+^\infty$, $H_\alpha(X+Y) \leqslant H_\alpha(X) + H_\alpha(Y)$.
5. Pour tout $c \geqslant 0$, $X \in L_+^\infty$, $H_\alpha(cX) = cH_\alpha(X)$.
6. Pour tout X, $Y \in L_+^\infty$, si $X \geqslant Y$ p.s. alors $H_\alpha(X) \geqslant H_\alpha(Y)$.

Remarque

La mesure de risque H_α n'est pas cohérente.

La mesure de risque de Haezendonck

But : Définir une mesure de risque cohérente pour toutes pertes essentiellement bornées à partir des mesures de risque d'Orlicz.

La mesure de risque de Haezendonck

But : Définir une mesure de risque cohérente pour toutes pertes essentiellement bornées à partir des mesures de risque d'Orlicz.
Rappel : $f^+ = \max(f, 0)$ pour $f : A \to \mathbb{R}$.

Définition

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité, $\alpha \in [0, 1[$, et Φ une fonction de Young normalisée. **La mesure de risque de Haezendonck** de niveau α est, pour tout $X \in L^\infty$:

$$\rho_\alpha(X) = \inf_{x \in \mathbb{R}} \pi_\alpha(X, x),$$

où pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\pi_\alpha(X, x) = \inf \left\{ a > x \middle| E\left[\Phi\left(\frac{(X-x)^+}{a-x}\right)\right] \leqslant 1 - \alpha \right\}.$$

La mesure de risque de Haezendonck

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité et $X : \Omega \to \mathbb{R}$ mesurable.
Soit $\alpha \in [0,1[$, $X \in L^\infty$ et $x \in \mathbb{R}$. On a que

$$\pi_\alpha(X,x) = x + H_\alpha((X-x)^+).$$

Donc

$$\rho_\alpha(X) = \inf_{x\in\mathbb{R}} \left(x + \inf \left\{ a > 0 | E\left[\Phi\left(\frac{(X-x)^+}{a}\right)\right] \leqslant 1-\alpha \right\} \right).$$

La Tail Value at Risk

Définition et Proposition

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité et $\alpha \in]0,1[$. **La Tail Value at Risk** de niveau α, notée $TVaR_\alpha$, est pour $X : \Omega \to \mathbb{R}$ mesurable et intégrable :

$$TVaR_\alpha(X) \triangleq \frac{1}{1-\alpha} \int_\alpha^1 VaR_y(X) dy = \inf_{x \in \mathbb{R}} \left\{ x + \frac{E((X-x)^+)}{1-\alpha} \right\}.$$

La Tail Value at Risk

Définition et Proposition

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité et $\alpha \in]0,1[$. **La Tail Value at Risk** de niveau α, notée $TVaR_\alpha$, est pour $X : \Omega \to \mathbb{R}$ mesurable et intégrable :

$$TVaR_\alpha(X) \triangleq \frac{1}{1-\alpha}\int_\alpha^1 VaR_y(X)dy = \inf_{x\in\mathbb{R}}\left\{x + \frac{E((X-x)^+)}{1-\alpha}\right\}.$$

Remarque

La $TVaR_\alpha$ est une mesure de risque de Haezendonck particulière.
En prenant comme fonction de Young normalisée $\Phi(x) = x$, pour tout $x \in [0, +\infty[$.

La mesure de risque de Haezendonck

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité et $X : \Omega \to \mathbb{R}$ mesurable. On note $\operatorname{ess\,sup} X = \inf \{M | \mathbb{P}(X \leqslant M) = 1\}$.

La mesure de risque de Haezendonck

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité et $X : \Omega \to \mathbb{R}$ mesurable. On note $\operatorname{ess\,sup} X = \inf \{M | \mathbb{P}(X \leqslant M) = 1\}$.

Remarque

Pour tout $\alpha \in [0, 1[$, ρ_α est bien une mesure de risque. En effet, pour tout $X \in L^\infty$:

$$-\infty < E(X) \leqslant \rho_\alpha(X) \leqslant H_\alpha(X^+) < +\infty.$$

La mesure de risque de Haezendonck

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité et $X : \Omega \to \mathbb{R}$ mesurable. On note $\operatorname{ess\,sup} X = \inf \{M | \mathbb{P}(X \leqslant M) = 1\}$.

Remarque

Pour tout $\alpha \in [0, 1[$, ρ_α est bien une mesure de risque. En effet, pour tout $X \in L^\infty$:

$$-\infty < E(X) \leqslant \rho_\alpha(X) \leqslant H_\alpha(X^+) < +\infty.$$

Proposition

Soit $\alpha \in [0, 1[$. La mesure de risque de Haezendonck $\rho_\alpha : L^\infty \to \mathbb{R}$ est une mesure de risque cohérente.

De plus ρ_α est invariante en loi et pour tout $X \in L^\infty$:

$$F_X^{-1}(\alpha) \leqslant \rho_\alpha(X) \leqslant \operatorname{ess\ sup} X.$$

Une construction plus générale

Proposition

Soit $\rho : L^\infty_+ \to \mathbb{R}$ une mesure de risque qui vérifie les propriétés de monotonicité, positive homogénéité et sous-additivité, telle que $\rho(1) \geqslant 1$. Alors $\widehat{\rho} : L^\infty \to \mathbb{R}$ définie comme

$$\forall X \in L^\infty, \ \widehat{\rho}(X) \triangleq \inf_{x \in \mathbb{R}} \{\rho((X-x)^+) + x\},$$

est une mesure de risque cohérente.
Si, de plus, $\rho : L^\infty_+ \to \mathbb{R}$ est invariante en loi, alors $\widehat{\rho} : L^\infty \to \mathbb{R}$ l'est également.

À partir de cette construction, nous pouvons nous poser les questions suivantes.

1. Pourrait-on construire une même mesure de risque à partir d'un espace de variables aléatoires réelles $\mathcal{X}$ **plus grand** que L^∞ ?

À partir de cette construction, nous pouvons nous poser les questions suivantes.

1. Pourrait-on construire une même mesure de risque à partir d'un espace de variables aléatoires réelles $\mathcal{X}$ **plus grand** que L^∞ ?
2. Pourrait-on construire une mesure de risque cohérente **encore plus générale** ?

À partir de cette construction, nous pouvons nous poser les questions suivantes.

1. Pourrait-on construire une même mesure de risque à partir d'un espace de variables aléatoires réelles $\mathcal{X}$ **plus grand** que L^∞ ?
2. Pourrait-on construire une mesure de risque cohérente **encore plus générale** ?
3. Quel est le plus grand espace de variables aléatoires réelles $\mathcal{X}$ sur lequel cette mesure de risque plus générale pourrait être construite ?