Représentations p-adiques

Sbabo David

Département de Mathématiques, Faculté des Sciences, UMONS

18 février 2016

K un corps, $\bar{K}$ une **clôture algébrique** de K et $K \subset L \subset \bar{K}$.

K un corps, $\bar{K}$ une **clôture algébrique** de K et $K \subset L \subset \bar{K}$.
$G(L/K) = \{f : L \to L : f \text{ automorphisme et } f_{|K} = Id\}$.
Si $L = \bar{K}$ on écrira simplement $G(K)$.

K un corps, $\bar{K}$ une **clôture algébrique** de K et $K \subset L \subset \bar{K}$.
$G(L/K) = \{f : L \to L : f \text{ automorphisme et } f_{|K} = Id\}$.
Si $L = \bar{K}$ on écrira simplement $G(K)$.

$$\begin{tikzcd} \bar{K} \arrow[d, dash] \\ L \arrow[d, dash] \arrow[u, dash, bend right, "G(L)"'] \\ K \arrow[u, dash, bend right, "G(L/K)"'] \arrow[uu, dash, bend left=60, "G(K)"] \end{tikzcd}$$

Théorie de Galois

K un corps, $\bar{K}$ une **clôture algébrique** de K et $K \subset L \subset \bar{K}$.
$G(L/K) = \{f : L \to L : f \text{ automorphisme et } f_{|K} = Id\}$.
Si $L = \bar{K}$ on écrira simplement $G(K)$.

$$\begin{tikzcd} \bar{K} \arrow[d, no head, bend left=60, "G(L)"] \arrow[dd, no head, bend right=60, "G(K)"'] \arrow[d, no head] \\ L \arrow[d, no head] \arrow[d, no head, bend left=60, "G(L/K)"] \\ K \end{tikzcd}$$

Connaître $G(L/K)$ équivant
à connaître L en fonction de K

Théorie de Galois

K un corps, $\bar{K}$ une **clôture algébrique** de K et $K \subset L \subset \bar{K}$.
$G(L/K) = \{f : L \to L : f \text{ automorphisme et } f_{|K} = Id\}$.
Si $L = \bar{K}$ on écrira simplement $G(K)$.

$$G(K)\left(\begin{array}{c} \bar{K} \\ | \\ L \\ | \\ K \end{array}\right. \quad \begin{array}{l} \left.\begin{array}{c} \\ \\ \end{array}\right\} G(L) \\ \left.\begin{array}{c} \\ \\ \end{array}\right\} G(L/K) \end{array}$$

Connaître $G(L/K)$ équivant
à connaître L en fonction de K
$G(L)$ est un sous-groupe de $G(K)$

Théorie de Galois

K un corps, $\bar{K}$ une **clôture algébrique** de K et $K \subset L \subset \bar{K}$.
$G(L/K) = \{f : L \to L : f \text{ automorphisme et } f_{|K} = Id\}$.
Si $L = \bar{K}$ on écrira simplement $G(K)$.

$$G(K)\left(\begin{array}{c}\bar{K}\\ | \\ L \\ | \\ K\end{array}\right. \begin{array}{l}\left.\begin{array}{c} \\ \\ \end{array}\right\} G(L) \\ \left.\begin{array}{c} \\ \\ \end{array}\right\} G(L/K)\end{array}$$

Connaître $G(L/K)$ équivaut
à connaître L en fonction de K
$G(L)$ est un sous-groupe de $G(K)$

Que peut-on dire quand $K = \mathbb{Q}$?

Le groupe $G(\mathbb{Q})$?

Le théorie de Galois apporte des réponses comme

- Pas de formule générale pour résoudre les équations polynomiales rationelles de degré au moins 5.
- Construction des polygônes réguliers à la règle et au compas.

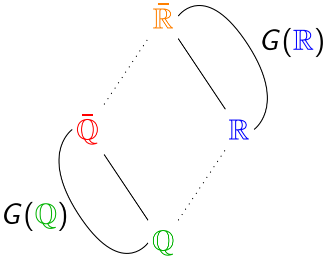
Exemple de conjecture : tout groupe fini est un quotient de $G(\mathbb{Q})$

Le groupe $G(\mathbb{Q})$?

Le théorie de Galois apporte des réponses comme

- Pas de formule générale pour résoudre les équations polynomiales rationelles de degré au moins 5.
- Construction des polygônes réguliers à la règle et au compas.

Exemple de conjecture : tout groupe fini est un quotient de $G(\mathbb{Q})$
Comment l'étudier ? La continuité.

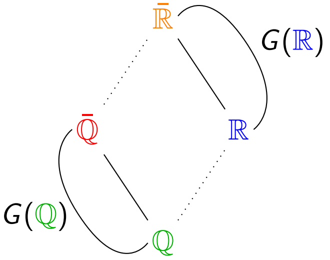


Le groupe $G(\mathbb{Q})$?

Le théorie de Galois apporte des réponses comme

- Pas de formule générale pour résoudre les équations polynomiales rationelles de degré au moins 5.
- Construction des polygônes réguliers à la règle et au compas.

Exemple de conjecture : tout groupe fini est un quotient de $G(\mathbb{Q})$
Comment l'étudier ? La continuité.

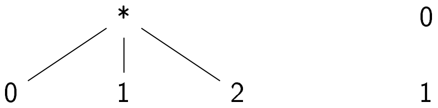


$G(\mathbb{R})$ est isomorphe
à un sous-groupe de $G(\mathbb{Q})$

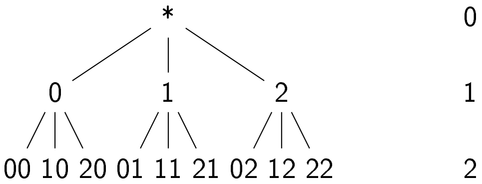
Mais $|G(\mathbb{R})| = 2$, donc
on ne connait que 2 éléments

C'est peu ...

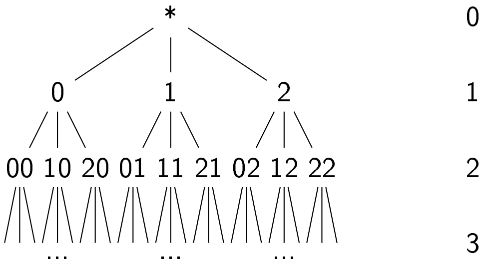
Une autre continuité ?



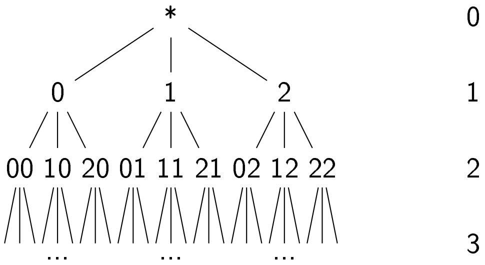
Une autre continuité ?



Une autre continuité ?

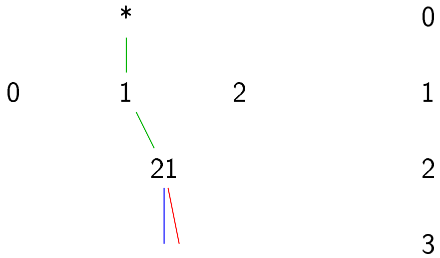


Une autre continuité ?



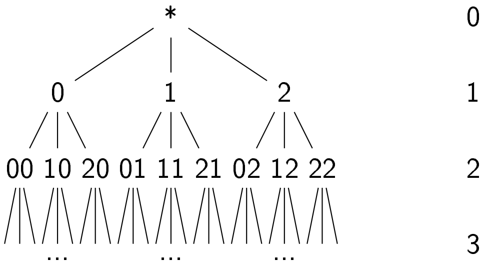
Soit n le maximum des profondeurs où ces 2 branches sont confondues, $d(b_1, b_2) = (\frac{1}{2})^n$.

Une autre continuité ?



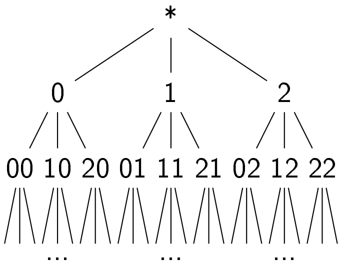
Soit n le maximum des profondeurs où ces 2 branches sont confondues, $d(b_1, b_2) = (\frac{1}{2})^n$. Exemple $d(...0121, ...0221) = (\frac{1}{2})^2$

Une autre continuité ?



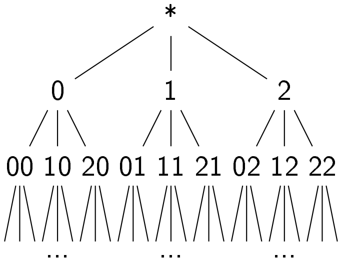
Soit n le maximum des profondeurs où ces 2 branches sont confondues, $d(b_1, b_2) = (\frac{1}{2})^n$.
A tout naturel correspond une branche et on notera l'ensemble des branches $\mathbb{Z}_3$.

Opérations sur l'arbre



On étend $+$ et $*$ des naturels à tout l'arbre :

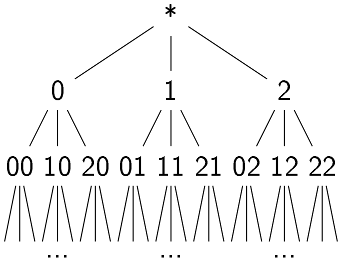
Opérations sur l'arbre



On étend $+$ et $*$ des naturels à tout l'arbre :

$$\begin{array}{rr} & .....00021 \\ + & .....22202 \\ \hline \end{array}$$

Opérations sur l'arbre

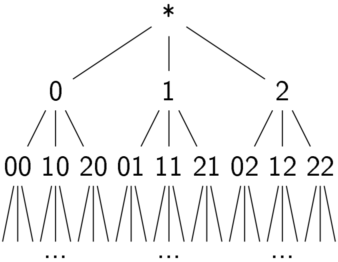


On étend $+$ et $*$ des naturels à tout l'arbre :

$$
\begin{array}{rl}
 & .....00021 \\
+ & .....22202 \\
\hline
 & 00000
\end{array}
$$

L'arbre contient les entiers négatifs, la branche .....22202 représente « -7 ».

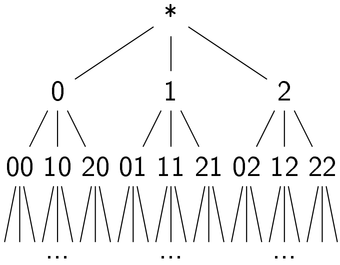
Opérations sur l'arbre



On étend $+$ et $*$ des naturels à tout l'arbre :

$$\begin{array}{rl} & \ldots..20202 \\ \text{x} & \ldots..00011 \\ \hline \end{array}$$

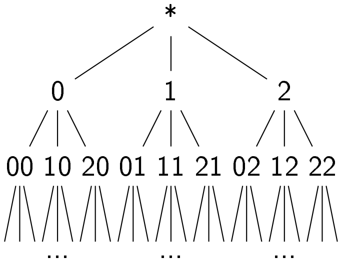
Opérations sur l'arbre



On étend $+$ et $*$ des naturels à tout l'arbre :

$$\begin{array}{rr} & .....20202 \\ \text{x} & .....00011 \\ \hline & .....20202 \end{array}$$

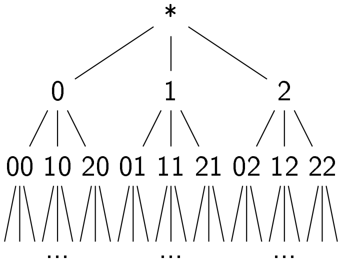
Opérations sur l'arbre



On étend $+$ et $*$ des naturels à tout l'arbre :

$$
\begin{array}{r}
.....20202 \\
\text{x } .....00011 \\
\hline
.....20202 \\
+.....0202*
\end{array}
$$

Opérations sur l'arbre

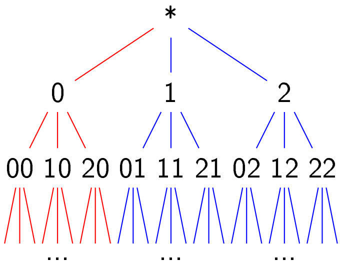


On étend $+$ et $*$ des naturels à tout l'arbre :

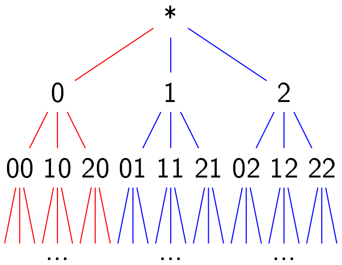
$$\begin{array}{r} .....20202 \\ \text{x } .....00011 \\ \hline .....20202 \\ +.....0202* \\ \hline .....22222 \end{array}$$

L'arbre contient certaines fractions,
la branche .....20202 représente « $-\frac{1}{4}$ ».

Sous arbres particuliers et corps des fractions

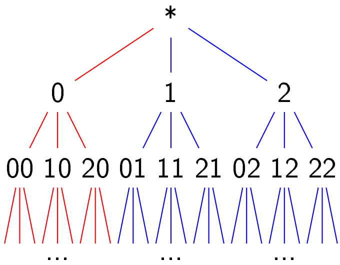


L'arbre en rouge est noté $p\mathbb{Z}_p$.
Si p premier : $|b| = d(b, 0)$ est une valeur absolue.



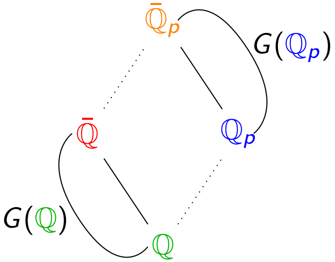
L'arbre en rouge est noté $p\mathbb{Z}_p$.
Si p premier : $|b| = d(b, 0)$ est une valeur absolue.
L'arbre en blue sera noté $\mathbb{Z}_p^*$.

Sous arbres particuliers et corps des fractions



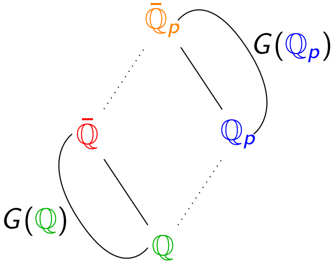
L'arbre en rouge est noté $p\mathbb{Z}_p$.
Si p premier : $|b| = d(b, 0)$ est une valeur absolue.
L'arbre en blue sera noté $\mathbb{Z}_p^*$.
On pose $\mathbb{Q}_p = \left\{ \frac{a}{b} : a \in \mathbb{Z}_p, b \in \mathbb{Z}_p \setminus \{0\} \right\}$.

Le groupe $G(\mathbb{Q}_p)$



$G(\mathbb{Q}_p)$ est infini mais « beaucoup plus petit » que $G(\mathbb{Q})$

Le groupe $G(\mathbb{Q}_p)$



$G(\mathbb{Q}_p)$ est infini mais « beaucoup plus petit » que $G(\mathbb{Q})$

Ce groupe est très mystérieux ... Nous allons étudier ses représentations.

Une E linéaire de dimension n de G peut être définie de manière équivalente comme

- $\rho : G \to GL_n(E)$.

Représentations

Une E linéaire de dimension n de G peut être définie de manière équivalente comme

- $\rho : G \to GL_n(E)$.
- un E-espace vectoriel V de dimension n muni d'une action linéaire de G.

Représentations

Une E linéaire de dimension n de G peut être définie de manière équivalente comme

- $\rho : G \to GL_n(E)$.
- un E-espace vectoriel V de dimension n muni d'une action linéaire de G.

Problème général : programme de Langlands

Représentations E-linéaires de dimension n de $G(K)$	$\overset{?}{\longleftrightarrow}$	Représentations E-linéaires de $GL_n(K)$
Objets arithmétiques		*Objets analytiques* *Espaces fonctionnels pour* $n \geq 2$

Programme de Langlands local p-adique :

$E = \mathbb{Q}_p$ et $K = \mathbb{Q}_p(\alpha) \subset \bar{\mathbb{Q}}_p$

Représentations $\mathbb{Q}_p$-linéaires de dimension n de G_K	$\longleftrightarrow$	Représentations $\mathbb{Q}_p$-linéaires de $GL_n(K)$ unitaires et admissibles

Programme de Langlands local p-adique :

$E = \mathbb{Q}_p$ et $K = \mathbb{Q}_p(\alpha) \subset \bar{\mathbb{Q}}_p$

Représentations $\mathbb{Q}_p$-linéaires de dimension n de G_K	$\longleftrightarrow$	Représentations $\mathbb{Q}_p$-linéaires de $GL_n(K)$ unitaires et admissibles

- Le cas $n = 1$ théorie du corps de classe local.
- Le cas $K = \mathbb{Q}_p$ et $n = 2$ (Colmez 2010)
  Cette correspondance repose sur :
  - La théorie des (φ, Γ)-modules développée par Fontaine
  - L'analyse fonctionnelle p-adique

Langlands local p-adique

$$
\begin{tikzcd}[column sep=large, row sep=large]
\boxed{\begin{array}{c}\text{Représentations}\\ \mathbb{Q}_p\text{-linéaires de}\\ \text{dimension } n \text{ de } G_K\end{array}} \arrow[r, leftrightarrow] \arrow[d, leftrightarrow, "\textit{Fontaine}"'] & \boxed{\begin{array}{c}\text{Représentations}\\ \mathbb{Q}_p\text{-linéaires de } GL_n(K)\\ \text{unitaires et admissibles}\end{array}} \\
\boxed{\begin{array}{c}(\varphi,\Gamma)\text{-modules étales de}\\ \text{dimension } 2 \text{ sur } \mathcal{E}_K\end{array}} \arrow[ur, leftrightarrow, "\textit{Colmez pour } K=\mathbb{Q}_p \textit{ et } n=2"'] &
\end{tikzcd}
$$

Un (φ, Γ)-module est la donnée :

- Module de type fini sur un anneau A
- φ semi-linéaire
- Action de Γ semi-linéaire continue qui commute avec φ

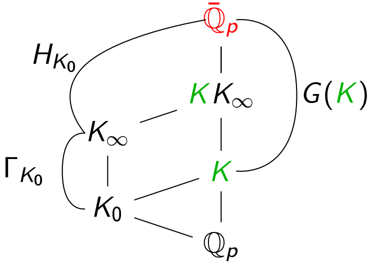
Fontaine (1990) : équivalence de catégorie sur l'anneau $\mathcal{E}_K$.

(φ, Γ)-modules

Un (φ, Γ)-module est la donnée :

- Module de type fini sur un anneau A
- φ semi-linéaire
- Action de Γ semi-linéaire continue qui commute avec φ

Fontaine (1990) : équivalence de catégorie sur l'anneau $\mathcal{E}_K$.



$$H = G(K) \cap H_{K_0}$$
$$\Gamma = G(K)/H$$
$$\chi : \Gamma \to \mathbb{Z}_p^*$$

Module de Wach

Si $K \subset K_\infty$:

$$\mathcal{E}_K = \left\{ \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n T^n : a_n \in K_0 \lim_{n\to-\infty} a_n = 0 \text{ et } \sup_{n\in\mathbb{Z}} |a_n| < \infty \right\}$$

- $\varphi(T) = (1+T)^p - 1$
- $\gamma(T) = (1+T)^{\chi(\gamma)} - 1$

Si $K \subset K_\infty$:

$$\mathcal{E}_K = \left\{ \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n T^n : a_n \in K_0 \lim_{n\to-\infty} a_n = 0 \text{ et } \sup_{n\in\mathbb{Z}} |a_n| < \infty \right\}$$

- $\varphi(T) = (1+T)^p - 1$
- $\gamma(T) = (1+T)^{\chi(\gamma)} - 1$

- Si V est une représentation de hauteur finie potentiellement cristalline alors $A = \left\{ \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n T^n : a_n \in K_0 \sup_{n\in\mathbb{N}} |a_n| < \infty \right\}$ suffit pour décrire V via un (φ, Γ)-module sur A (module de Wach).

Module de Wach

Si $K \subset K_\infty$:

$$\mathcal{E}_K = \left\{ \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n T^n : a_n \in K_0 \lim_{n\to-\infty} a_n = 0 \text{ et } \sup_{n\in\mathbb{Z}} |a_n| < \infty \right\}$$

- $\varphi(T) = (1+T)^p - 1$
- $\gamma(T) = (1+T)^{\chi(\gamma)} - 1$

- Si V est une représentation de hauteur finie potentiellement cristalline alors $A = \left\{ \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n T^n : a_n \in K_0 \sup_{n\in\mathbb{N}} |a_n| < \infty \right\}$ suffit pour décrire V via un (φ, Γ)-module sur A (module de Wach).
- Pas de hauteur finie : $K \not\subset K_\infty$ et A ne suffit pas.

Wach (1996)

Pas de hauteur finie

Si $K \not\subset K_\infty$: $\mathcal{E}_K = ?$

Pas de hauteur finie

Si $K \not\subset K_\infty$: $\mathcal{E}_K = ?$ Mais si $K/\mathbb{Q}_p$ est modérée, alors : Berger (2014)

$$\mathcal{E}_K = \left\{ \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n T_K^n : a_n \in K_0 \lim_{n\to-\infty} a_n = 0 \text{ et } \sup_{n\in\mathbb{Z}} |a_n| < \infty \right\}$$

- $\varphi(T_K) = T_K^p\left(\frac{(1+T_K^n)^p - 1}{T_K^{pn}}\right)^{\frac{1}{n}}$
- $\gamma(T_K) = T_K\left(\frac{(1+T_K^n)^{\chi(\gamma)} - 1}{T_K^n}\right)^{\frac{1}{n}}[\bar{\omega}_n^p(\gamma)]\langle\chi(\gamma)\rangle^{\frac{1}{n}}$

Pas de hauteur finie

Si $K \not\subset K_\infty$: $\mathcal{E}_K = ?$ Mais si $K/\mathbb{Q}_p$ est modérée, alors :
Berger (2014)

$$\mathcal{E}_K = \left\{ \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n T_K^n : a_n \in K_0 \lim_{n\to-\infty} a_n = 0 \text{ et } \sup_{n\in\mathbb{Z}} |a_n| < \infty \right\}$$

- $\varphi(T_K) = \; = "\varphi(T)^{\frac{1}{n}}"$
- $\gamma(T_K) = \; = "\gamma(T)^{\frac{1}{n}}"$

Correspond à considérer $T_K^n = T$.

Soit V est une représentation potentiellement cristalinne sur qui devient cristalinne sur K provenant d'une courbe elliptique sur $\mathbb{Q}_p$

Soit V est une représentation potentiellement cristalinne sur qui devient cristalinne sur K provenant d'une courbe elliptique sur $\mathbb{Q}_p$

- $[K : \mathbb{Q}_p]$ divise $p - 1$ (correspond à $K \subset K_\infty$)
  On peut décrire V via un module de Wach.

Analogie aux modules de Wach

Soit V est une représentation potentiellement cristalinne sur qui devient cristalinne sur K provenant d'une courbe elliptique sur $\mathbb{Q}_p$

- $[K : \mathbb{Q}_p]$ divise $p - 1$ (correspond à $K \subset K_\infty$)
  On peut décrire V via un module de Wach.
- Sinon $[K : \mathbb{Q}_p]$ divise $p + 1$ ($K \not\subset K_\infty$)
  Comment décrire V ?

Analogie aux modules de Wach

Soit V est une représentation potentiellement cristalinne sur qui devient cristalinne sur K provenant d'une courbe elliptique sur $\mathbb{Q}_p$

- $[K : \mathbb{Q}_p]$ divise $p - 1$ (correspond à $K \subset K_\infty$)
  On peut décrire V via un module de Wach.
- Sinon $[K : \mathbb{Q}_p]$ divise $p + 1$ ($K \not\subset K_\infty$)
  Comment décrire V ?

But : trouver un anneau B qui permette de généraliser les modules de Wach.

Un anneau candidat ?

1) B_K le (complété) saturé par φ de $\mathrm{A}[T_K]$ (le plus petit anneau (complet) de $\mathcal{E}_K$ stable par φ contenant A et T_K en identifiant T à T_K^n) pour décire une représentation cristalinne de $G(K)$ s'étendant en une représentation sur $G(\mathbb{Q}_p)$ (et réciproquement).

Un anneau candidat ?

1) B_K le (complété) saturé par φ de $\mathrm{A}[T_K]$ (le plus petit anneau (complet) de $\mathcal{E}_K$ stable par φ contenant A et T_K en identifiant T à T_K^n) pour décire une représentation cristalinne de $G(K)$ s'étendant en une représentation sur $G(\mathbb{Q}_p)$ (et réciproquement).
2) $B_{\mathbb{Q}_p}$ l'anneau des séries formelles en T et $\frac{\varphi^n(T)}{T^{p^n}} - 1$ pour décrire une représentation potentiellement cristalline de $G(\mathbb{Q}_p)$ (et réciproquement).

Ca commence à devenir vraiment technique

Ca commence à devenir vraiment technique

Merci de votre attention.