Existence de vecteurs $\mathcal{A}$-hypercycliques communs

Séminaire jeunes

Monia Mestiri

Département de Mathématique
Université de Mons

13 avril 2016

Contexte

La dynamique linéaire est l'étude du comportement des orbites d'opérateurs sur des espaces de Banach ou de façon plus générale sur des espaces de Fréchet.

L'orbite d'un vecteur x pour un opérateur linéaire et continu $T : X \to X$ est donnée par :

$$\mathrm{orb}(x, T) \triangleq \{T^n(x) \mid n \in \mathbb{N}\},$$

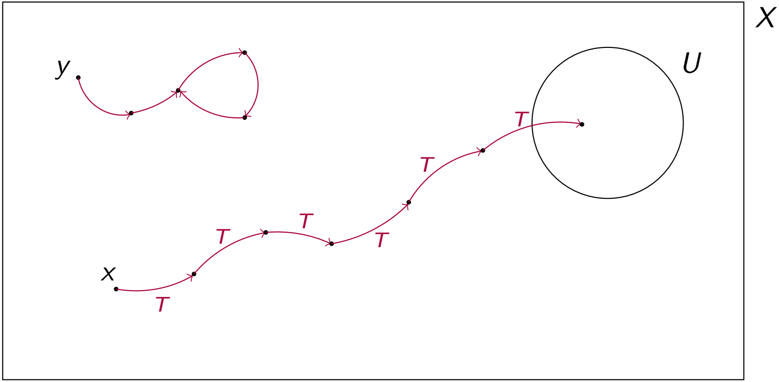
$$\text{où pour chaque } n, \quad T^n = \underbrace{T \circ T \circ \ldots \circ T}_{n \text{ fois}} \text{ et } T^0 = Id_X.$$

Rappelons qu'un opérateur T est dit linéaire si :

$$\text{pour tous } x, y \in X \text{ et } a \text{ scalaire, } T(ax + y) = aT(x) + T(y).$$

Notion de base

Idée : partant d'un même vecteur x, visiter chaque voisinage de l'espace.



Notion de base

Une des propriétés les plus étudiées des orbites est la densité. Ceci nous amène à la notion d'hypercyclicité.

Définition

Soient X un espace de Banach et $T : X \to X$ un opérateur linéaire et continu.
On dit que T est hypercyclique s'il existe un vecteur x de X tel que l'orbite de x pour T est dense dans X. On dit alors que x est un vecteur hypercyclique pour T.

Hypercyclicité

En pratique, on utilise souvent une formulation équivalente de l'hypercyclicité due à G.D. Birkhoff. Ceci fait l'objet du théorème de transitivité de Birkhoff.

Théorème de transitivité de Birkhoff

Soient X un espace de Banach séparable et $T : X \to X$ un opérateur linéaire et continu. Les assertions suivantes sont équivalentes :

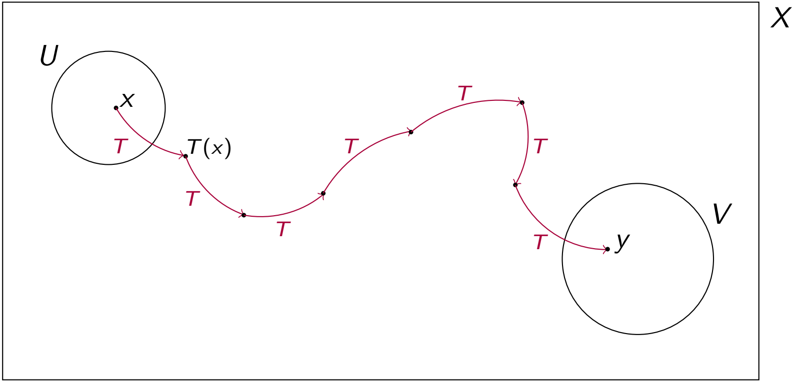
(i) T est hypercyclique ;

(ii) pour tous ouverts non-vides U, V de X, il existe un naturel n tel que $T^n(U) \cap V \neq \emptyset$.

De plus, si une de ces conditions est satisfaite, l'ensemble des vecteurs hypercycliques pour T est un ensemble G_δ dense dans X.

Hypercyclicité

Intuitivement, cela peut se représenter comme suit :



Ici, on a $y = T^7(x)$. Donc, $T^7(U) \cap V \neq \emptyset$.

Exemples d'opérateurs hypercycliques

Citons quelques exemples d'opérateurs hypercycliques.

(1) L'opérateur de dérivation D défini par :

$$\text{pour toute fonction } f : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \text{ holomorphe, } D(f) = f'.$$

(2) Les opérateurs de translation T_a avec $a \in \mathbb{C}_0$ qui à chaque fonction holomorphe $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, associe :

$$\begin{array}{rccc} T_a(f) & : & \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ & & z & \mapsto & f(z+a). \end{array}$$

(3) Les multiples du shift λB pour $\lambda > 1$.

$$\begin{array}{rccc} \lambda B & : & l^p(\mathbb{N}) & \to & l^p(\mathbb{N}) \\ & & (x_0, x_1, x_2, \ldots) & \mapsto & (\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3, \ldots). \end{array}$$

Critère d'hypercyclicité

Parmi les nombreux critères d'hypercyclicité étudiés, citons le plus optimal obtenu par J. Bès et A. Peris.

Critère d'hypercyclicité

Soient X un espace de Banach séparable et $T : X \to X$ un opérateur linéaire et continu. Supposons qu'il existe X_0, Y_0 deux sous-ensembles denses dans X, $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite strictement croissante de naturels et $(S_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ une suite d'applications allant de Y_0 dans X tels que :

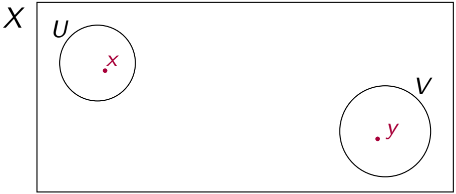
(i) pour tout $x \in X_0,\ T^{n_k}(x) \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$;

(ii) pour tout $y \in Y_0,\ S_{n_k}(y) \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$;

(iii) pour tout $y \in Y_0,\ T^{n_k}(S_{n_k}(y)) \xrightarrow[k\to\infty]{} y$.

Alors, T est hypercyclique.

Idée



(i) $\forall x \in X_0,\ T^{n_k}(x) \xrightarrow[k\to\infty]{} 0.$

(ii) $\forall y \in Y_0, S_{n_k}(y) \xrightarrow[k\to\infty]{} 0.$

(iii) $\forall y \in Y_0,\ T^{n_k}(S_{n_k}(y)) \xrightarrow[k\to\infty]{} y.$

X_0, Y_0 denses $\Rightarrow \exists\ x, y \in X$ tel que $x \in X_0 \cap U$ et $y \in Y_0 \cap V$.

Par (ii), $x + S_{n_k}(y) \xrightarrow[k\to\infty]{} x.$

Et par (i) et (iii), on a

$$T^{n_k}(x + S_{n_k}(y)) = T^{n_k}(x) + T^{n_k}(S_{n_k}(y)) \xrightarrow[k\to\infty]{} y.$$

Donc, pour k suffisamment grand, on obtient :

$$x + S_{n_k}(y) \in U \text{ et } T^{n_k}(x + S_{n_k}(y)) \in V.$$

Shifts à poids

Attardons-nous sur des opérateurs fort importants : les shifts à poids.

Rappel

Pour $p \geq 1$,

$$l^p(\mathbb{N}) := \left\{ (x_n)_{n\geq 0} \subseteq \mathbb{R} \mid \sum_{n\geq 0} |x_n|^p < \infty \right\}.$$

Définition

Soient $p \geq 1$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée de scalaires non-nuls. Le shift à poids associé à la suite de poids $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ désigne l'application B_w qui à chaque suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $l^p(\mathbb{N})$, associe :

$$B_w((x_0, x_1, x_2, \ldots)) = (w_1 x_1, w_2 x_2, w_3 x_3, \ldots).$$

Les shifts à poids sont des opérateurs linéaires et continus sur $l^p(\mathbb{N})$.

Une autre particularité des shifts à poids est qu'ils font l'objet de nombreuses caractérisations. Citons notamment la caractérisation de l'hypercyclicité.

Théorème (Salas)

Soient $p \geq 1$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée de scalaires non-nuls. Les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) B_w satisfait le critère d'hypercyclicité ;

(ii) B_w est hypercyclique sur $l^p(\mathbb{N})$;

(iii) $\sup\limits_{n\geq 1} \prod\limits_{\nu=1}^{n} |w_\nu| = +\infty$.

Les conditions nécessaires et suffisantes pour avoir B_w hypercyclique sont connues.

Question

Que se passe-t-il lorsque l'on prend des polynômes de ces opérateurs ?

$$P(B_w) = a_0 \mathrm{Id}_X + a_1 B_w + a_2 B_w^2 + \ldots + a_n B_w^n.$$

Pour l'instant, on sait que si $w = (w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite bornée de scalaires non-nuls, l'opérateur $\mathrm{Id}_X + B_w$ est hypercyclique.

Allons un peu plus loin...

Définition

Etant donnés X un espace de Banach, $T : X \to X$ un opérateur et x un vecteur de X, on pose pour tout ouvert V,

$$N(x, V) := \{n \in \mathbb{N} \mid T^n(x) \in V\}.$$

On a :

$$x \text{ est hypercyclique} \rightsquigarrow \forall\ V \neq \emptyset \text{ ouvert},\ N(x, V) \text{ est infini}.$$

$$x \text{ est fréquemment hypercyclique} \rightsquigarrow \forall\ V \neq \emptyset \text{ ouvert},\ \underline{\text{dens}}\, N(x, V) > 0.$$

$$x \text{ est } \mathcal{U}\text{-fréquemment hypercyclique} \rightsquigarrow \forall\ V \neq \emptyset \text{ ouvert},\ \overline{\text{dens}}\, N(x, V) > 0.$$

Allons un peu plus loin...

Définition

Etant donnés X un espace de Banach, $T : X \to X$ un opérateur et x un vecteur de X, on pose pour tout ouvert V,

$$N(x, V) := \{n \in \mathbb{N} \mid T^n(x) \in V\}.$$

On a :

x est hypercyclique : [Beauzamy 1986].

x est fréquemment hypercyclique : [Bayart, Grivaux 2004].

x est $\mathcal{U}$-fréquemment hypercyclique : [Shkarin 2009].

$\mathcal{A}$-hypercyclicité

Une définition récente englobe toutes ces notions et bien d'autres.

Définition [Bès, Menet, Peris, Puig 2014]

Etant donnée $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{N})$ une famille de Furstenberg, X un espace de Banach et $T : X \to X$ un opérateur linéaire et continu. On dit que T est $\mathcal{A}$-hypercyclique s'il existe un vecteur x de X tel que :

$$\text{pour tout } V \text{ ouvert non-vide, } N(x, V) \in \mathcal{A}.$$

On a :

$$T \text{ est hypercyclique} \rightsquigarrow \mathcal{A} := \{A \subseteq \mathbb{N} \mid A \text{ infini}\}.$$

$$T \text{ est fréquemment hypercyclique} \rightsquigarrow \mathcal{A} := \{A \subseteq \mathbb{N} \mid \underline{\text{dens}}\, A > 0\}.$$

$$T \text{ est } \mathcal{U}\text{-fréquemment hypercyclique} \rightsquigarrow \mathcal{A} := \{A \subseteq \mathbb{N} \mid \overline{\text{dens}}\, A > 0\}.$$

Un théorème de Birkhoff pour la $\mathcal{A}$-hypercyclicité

Théorème [Bonilla, Grosse-Erdmann 2016]

Etant donnée $\mathcal{A} = \bigcup_{\delta \in D} \bigcap_{\mu \in M} \mathcal{A}_{\delta,\mu} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{N})$ une famille de Furstenberg supérieure, X un espace de Banach et $T : X \to X$ un opérateur linéaire et continu. Les assertions suivantes sont alors équivalentes :

(i) T est $\mathcal{A}$-hypercyclique ;

(ii) l'ensemble des vecteurs $\mathcal{A}$-hypercycliques est résiduel ;

(iii) pour tout ouvert V non-vide, il existe $\delta \in D$ tel que pour tout ouvert U non-vide, pour tout $\mu \in M$, il existe $x \in U$ de sorte que $N(x, V) \in A_{\delta,\mu}$.

En particulier,

Hypercyclicité $\rightsquigarrow$ vrai.

Fréquente hypercyclicité $\rightsquigarrow$ FAUX.

$\mathcal{U}$-fréquente hypercyclicité $\rightsquigarrow$ vrai.

Sujet de recherche

Questions

(1) Peut-on adapter ce qui est fait pour l'hypercyclicité commune à la $\mathcal{U}$-fréquemment hypercyclicité commune ?

(2) Qu'en est-il plus généralement pour la $\mathcal{A}$-hypercyclicité commune ?

(3) La famille des multiples du shift $(\lambda B)_{\lambda>1}$ possède-t-elle un vecteur $\mathcal{U}$-fréquemment hypercyclique commun ?