Prouver les propriétés extrémales d'un graphe

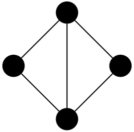
Hadrien Mélot
Service d'Algorithmique

UMONS

Séminaire Jeunes – 13 février 2017

Rappels

Nous travaillons avec des graphes simples et non-dirigés $G = (V, E)$.

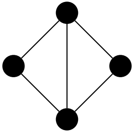


Définitions

- Degré d'un sommet
- Distance entre deux sommets
- Connexité et composantes connexes
- Clique
- Sous-graphe induit
- Isomorphisme

Invariants

Un invariant de graphe est une valeur préservée par isomorphisme.



Définitions

- Ordre n
- Taille m
- Multitude d'autres invariants : degré maximum; diamètre; nombre de clique (clique number); nombre de composantes connexes; etc.

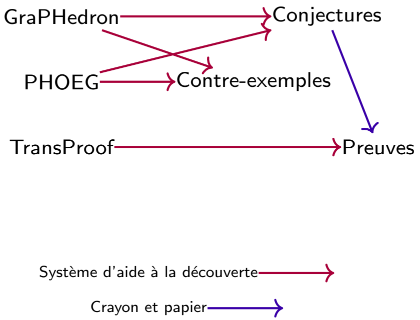
Théorie extrémale des graphes

- Etudier les propriétés extrémales des graphes $\simeq$ borner les valeurs possibles pour un invariant (sous certaines contraintes / conditions)
- Exemple : quel est le diamètre minimum (maximum) possible pour un graphe connexe d'ordre n?

Théorie extrémale des graphes

- Etudier les propriétés extrémales des graphes $\simeq$ borner les valeurs possibles pour un invariant (sous certaines contraintes / conditions)
- Exemple : quel est le diamètre minimum (maximum) possible pour un graphe connexe d'ordre n?
- Théorème de Turán (1941) : quelle est la taille maximum pour un graphe d'ordre n ne contenant pas de clique de taille $r + 1$?

Recherches au sein du Service d'Algorithmique



Prouver les propriétés extrémales d'un graphe

Les preuves par transformations $=$ technique de preuve fréquente.

Prouver les propriétés extrémales d'un graphe

Les preuves par transformations = technique de preuve fréquente.

Il existe bien sûr quantité d'autres techniques de preuves.

Prouver les propriétés extrémales d'un graphe

Les preuves par transformations = technique de preuve fréquente.

Il existe bien sûr quantité d'autres techniques de preuves.

A titre d'exemple, dans Proofs from the book :
six preuves très différentes pour le théorème de Turán.

Présentation des différentes techniques de preuves

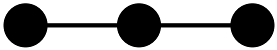
Technique 1 sur 347

Présentation des différentes techniques de preuves

Bon Okay.

On va se contenter d'une jolie preuve simple
à propos de colorations.

Colorations



Colorations

Définition

Une coloration est une assignation de couleurs aux sommets de G.

Colorations

Définition

Une coloration propre est une assignation de couleurs aux sommets de G telle que deux sommets adjacents ont des couleurs distinctes.

Colorations = partition des sommets

Les couleurs elles-mêmes n'ont pas vraiment d'importance.

Mais une coloration propre est une partition des sommets en classes indépendantes.

$\Rightarrow$ beaucoup d'applications (horaires, fréquences radio, ...)

Exemple

Quel est le nombre de colorations propres distinctes de ce graphe ?

Exemple

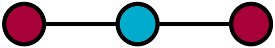
Quel est le nombre de colorations propres distinctes de ce graphe ?

- Pas de coloration propre utilisant exactement 1 couleur

Exemple

Quel est le nombre de colorations propres distinctes de ce graphe ?

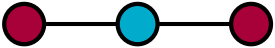
- Pas de coloration propre utilisant exactement 1 couleur
- Une coloration propre utilisant exactement 2 couleurs :



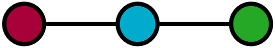
Exemple

Quel est le nombre de colorations propres distinctes de ce graphe ?

- Pas de coloration propre utilisant exactement 1 couleur
- Une coloration propre utilisant exactement 2 couleurs :



- Une coloration propre utilisant exactement 3 couleurs :



Nombre de colorations non-équivalentes : 2

Nombre de colorations non-équivalentes

On note $\mathcal{P}(G)$ le nombre de colorations non-équivalentes d'un graphe G.

Nombre de colorations non-équivalentes

On note $\mathcal{P}(G)$ le nombre de colorations non-équivalentes d'un graphe G.

Quel vaut $\mathcal{P}(G)$

- si G est un graphe complet ?
- si G est un graphe vide ?

Nombre de colorations non-équivalentes

On note $\mathcal{P}(G)$ le nombre de colorations non-équivalentes d'un graphe G.

Quel vaut $\mathcal{P}(G)$

- si G est un graphe complet ?
- si G est un graphe vide ?

Nombre de Bell $B_n =$ nombre de manière de partitionner un ensemble de n éléments.

$$B_1 = 1,\ B_2 = 2,\ B_3 = 5,\ B_4 = 15,\ B_5 = 52,\ \ldots$$

Nombre de colorations non-équivalentes

On note $\mathcal{P}(G)$ le nombre de colorations non-équivalentes d'un graphe G.

Quel vaut $\mathcal{P}(G)$

- si G est un graphe complet ?
- si G est un graphe vide ?

Nombre de Bell $B_n =$ nombre de manière de partitionner un ensemble de n éléments.

$$B_1 = 1,\ B_2 = 2,\ B_3 = 5,\ B_4 = 15,\ B_5 = 52,\ \ldots$$

$\mathcal{P}(G)$ est aussi appelé le nombre de Bell d'un graphe [Duncan & Peele, 2009]

Question

Dans

Hertz, Mélot, Counting the number of non-equivalent vertex colorings of a graph, Discrete Applied Mathematics 203 (2016), 62–71.

on se pose la question suivante :

Parmi tous les graphes d'ordre n ayant un degré maximum Δ, quels sont les graphes qui maximisent ou minimisent $\mathcal{P}(G)$?

Résultats

Exemple: minimisation de $\mathcal{P}(G)$ quand $\Delta = n - 1$

Résultats

Exemple: minimisation de $\mathcal{P}(G)$ quand $\Delta = n - 1$

Trivial : $\mathcal{P}(K_n) = 1$ et
il est évident que c'est le nombre minimum de colorations.

Résultats

Exemple: minimisation de $\mathcal{P}(G)$ quand $\Delta = n - 1$

Trivial : $\mathcal{P}(K_n) = 1$ et
il est évident que c'est le nombre minimum de colorations.

Autres résultats :

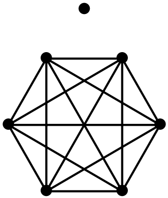
- graphes maximisant $\mathcal{P}(G)$ pour n'importe quelle valeur de Δ : résolu
- graphes minimisant $\mathcal{P}(G)$: résolu pour certaines valeurs de Δ. La preuve suivante : quand $\Delta = n - 2$.

Minimisation de $\mathcal{P}(G)$ quand $\Delta = n - 2$

Une idée de la forme des graphes minimisant $\mathcal{P}(G)$ quand $\Delta = n - 2$?

Minimisation de $\mathcal{P}(G)$ quand $\Delta = n - 2$

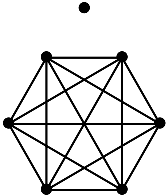
Une idée de la forme des graphes minimisant $\mathcal{P}(G)$ quand $\Delta = n - 2$?



$K_{n-1} \cup K_1$

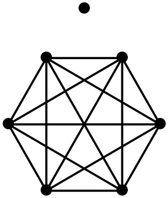
Minimisation de $\mathcal{P}(G)$ quand $\Delta = n - 2$

Une idée de la valeur de $\mathcal{P}(K_{n-1} \cup K_1)$?



Minimisation de $\mathcal{P}(G)$ quand $\Delta = n - 2$

Une idée de la valeur de $\mathcal{P}(K_{n-1} \cup K_1)$?



$$\mathcal{P}(K_{n-1} \cup K_1) = n$$

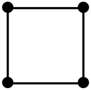
Minimisation de $\mathcal{P}(G)$ quand $\Delta = n - 2$

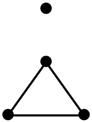
Théorème

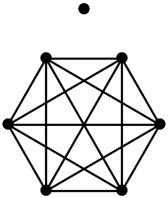
Soit G un graphe d'ordre $n \geq 2$ tel que $\Delta(G) = n - 2$. Alors,

$$\mathcal{P}(G) \geq n$$

avec égalité si et seulement si G est isomorphique à $K_{n-1} \cup K_1$ quand $n \neq 4$, et G est isomorphique à $K_3 \cup K_1$ ou C_4 (cycle d'ordre 4) sinon.







Preuve

Soit $\mathcal{G}$ l'ensemble de tous les graphes

- d'ordre n; et
- avec un degré maximum $= n - 2$.

Preuve

Soit $\mathcal{G}$ l'ensemble de tous les graphes

- d'ordre n; et
- avec un degré maximum $= n - 2$.

La preuve est par induction sur n. Supposons d'abord que $n = 2$.

Preuve

Soit $\mathcal{G}$ l'ensemble de tous les graphes

- d'ordre n; et
- avec un degré maximum $= n - 2$.

La preuve est par induction sur n. Supposons d'abord que $n = 2$. Comme $\Delta(G) = n - 2 = 0$, $\mathcal{G}$ ne contient que $K_1 \cup K_1$ et le résultat s'ensuit.

Preuve

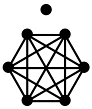
Soit $\mathcal{G}$ l'ensemble de tous les graphes

- d'ordre n; et
- avec un degré maximum $= n - 2$.

La preuve est par induction sur n. Supposons d'abord que $n = 2$. Comme $\Delta(G) = n - 2 = 0$, $\mathcal{G}$ ne contient que $K_1 \cup K_1$ et le résultat s'ensuit.

Maintenant, supposons que $n > 2$ et que $G = (V, E)$ est extrémal, c'est-à-dire que $\mathcal{P}(G)$ est minimum parmi tous les graphes de $\mathcal{G}$. Alors,

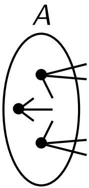
$$\mathcal{P}(G) \leq \mathcal{P}(K_{n-1} \cup K_1) = n.$$



Quelle est la structure d'un graphe extrémal $G = (V, E)$?

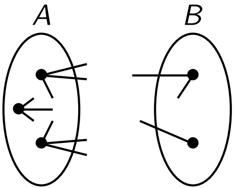
Quelle est la structure d'un graphe extrémal $G = (V, E)$?

Soit $A \subseteq V$ le sous-ensemble des sommets ayant un degré égal à $n - 2$



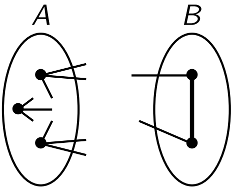
Quelle est la structure d'un graphe extrémal $G = (V, E)$?

Soit $A \subseteq V$ le sous-ensemble des sommets ayant un degré égal à $n - 2$ et soit $B = V \setminus A$.



Quelle est la structure d'un graphe extrémal $G = (V, E)$?

Soit $A \subseteq V$ le sous-ensemble des sommets ayant un degré égal à $n - 2$ et soit $B = V \setminus A$.

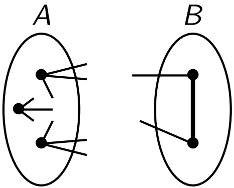


Fait 1

B est une clique.

Quelle est la structure d'un graphe extrémal $G = (V, E)$?

Soit $A \subseteq V$ le sous-ensemble des sommets ayant un degré égal à $n - 2$ et soit $B = V \setminus A$.



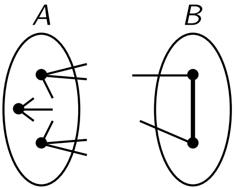
Fait 1

B est une clique.

Et qu'en est-il de A ?

Quelle est la structure d'un graphe extrémal $G = (V, E)$?

Soit $A \subseteq V$ le sous-ensemble des sommets ayant un degré égal à $n - 2$ et soit $B = V \setminus A$.



Fait 1

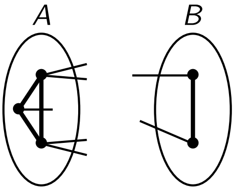
B est une clique.

Et qu'en est-il de A ?

- soit A contient une paire (v, w) telle que $vw \notin E$,

Quelle est la structure d'un graphe extrémal $G = (V, E)$?

Soit $A \subseteq V$ le sous-ensemble des sommets ayant un degré égal à $n-2$ et soit $B = V \setminus A$.



Fait 1

B est une clique.

Et qu'en est-il de A ?

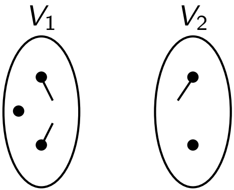
- soit A contient une paire (v, w) telle que $vw \notin E$,
- soit A est aussi une clique.

Nous allons considérer les deux cas (A est une clique ou non) mais nous avons d'abord besoin d'un autre fait facile.

Nous allons considérer les deux cas (A est une clique ou non) mais nous avons d'abord besoin d'un autre fait facile.

Fait 2

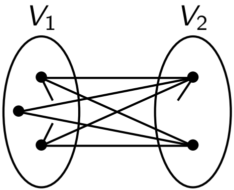
Soit $G = (V, E)$*. Si* $\exists V_1, V_2$ *tel que* $V_1 \cup V_2 = V$*,* $V_1 \cap V_2 = \emptyset$



Nous allons considérer les deux cas (A est une clique ou non) mais nous avons d'abord besoin d'un autre fait facile.

Fait 2

Soit $G = (V, E)$*. Si* $\exists V_1, V_2$ *tel que* $V_1 \cup V_2 = V$*,* $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ *et tel que* $\forall v \in V_1, \forall w \in V_2$ *nous avons* $vw \in E$*,*



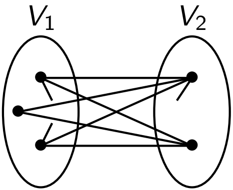
Nous allons considérer les deux cas (A est une clique ou non) mais nous avons d'abord besoin d'un autre fait facile.

Fait 2

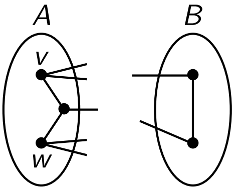
Soit $G = (V, E)$. Si $\exists V_1, V_2$ tel que $V_1 \cup V_2 = V$, $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ et tel que $\forall v \in V_1, \forall w \in V_2$ nous avons $vw \in E$, alors

$$\mathcal{P}(G) = \mathcal{P}(G_1) \times \mathcal{P}(G_2),$$

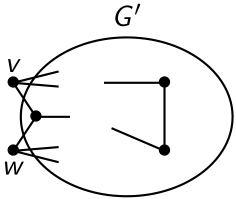
où G_1 (resp. G_2) est le sous-graphe de G induit par V_1 (resp. V_2).



Cas 1. Supposons que A contient v et w tel que $vw \notin E$.

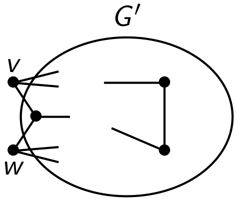


Cas 1. Supposons que A contient v et w tel que $vw \notin E$.



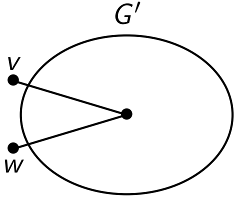
- Soit G' le sous-graphe de G induit par $V \setminus \{v, w\}$.

Cas 1. Supposons que A contient v et w tel que $vw \notin E$.



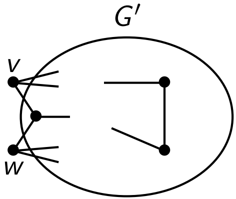
- Soit G' le sous-graphe de G induit par $V \setminus \{v, w\}$.
- Par le **Fait 2**, nous avons que $\mathcal{P}(G) = 2\mathcal{P}(G')$ car v et w sont adjacent à tous les sommets de G' et $\mathcal{P}(\overline{K_2}) = 2$.

Cas 1. Supposons que A contient v et w tel que $vw \notin E$.



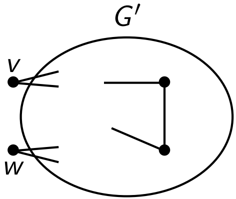
- Soit G' le sous-graphe de G induit par $V \setminus \{v, w\}$.
- Par le **Fait 2**, nous avons que $\mathcal{P}(G) = 2\mathcal{P}(G')$ car v et w sont adjacent à tous les sommets de G' et $\mathcal{P}(\overline{K_2}) = 2$.
- Si $n = 3$, alors $\Delta(G) = n - 1$ ce qui est impossible. Donc, $n \geq 4$.

Cas 1. Supposons que A contient v et w tel que $vw \notin E$.



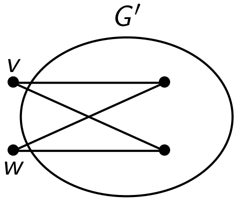
- Soit G' le sous-graphe de G induit par $V \setminus \{v, w\}$.
- Par le **Fait 2**, nous avons que $\mathcal{P}(G) = 2\mathcal{P}(G')$ car v et w sont adjacent à tous les sommets de G' et $\mathcal{P}(\overline{K_2}) = 2$.
- Si $n = 3$, alors $\Delta(G) = n - 1$ ce qui est impossible. Donc, $n \geq 4$.
- Par induction, $n \geq \mathcal{P}(G) \geq 2(n-2)$,

Cas 1. Supposons que A contient v et w tel que $vw \notin E$.



- Soit G' le sous-graphe de G induit par $V \setminus \{v, w\}$.
- Par le **Fait 2**, nous avons que $\mathcal{P}(G) = 2\mathcal{P}(G')$ car v et w sont adjacent à tous les sommets de G' et $\mathcal{P}(\overline{K_2}) = 2$.
- Si $n = 3$, alors $\Delta(G) = n - 1$ ce qui est impossible. Donc, $n \geq 4$.
- Par induction, $n \geq \mathcal{P}(G) \geq 2(n-2)$, ce qui signifie que $n \leq 4$.

Cas 1. Supposons que A contient v et w tel que $vw \notin E$.

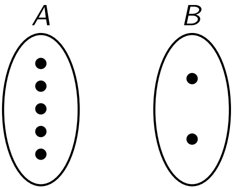


- Soit G' le sous-graphe de G induit par $V \setminus \{v, w\}$.
- Par le **Fait 2**, nous avons que $\mathcal{P}(G) = 2\mathcal{P}(G')$ car v et w sont adjacent à tous les sommets de G' et $\mathcal{P}(\overline{K_2}) = 2$.
- Si $n = 3$, alors $\Delta(G) = n - 1$ ce qui est impossible. Donc, $n \geq 4$.
- Par induction, $n \geq \mathcal{P}(G) \geq 2(n-2)$, ce qui signifie que $n \leq 4$.
- Donc, $n = 4$ et $G \simeq C_4$.

Cas 2. Donc maintenant A et B sont des cliques.

Cas 2. Donc maintenant A et B sont des cliques.

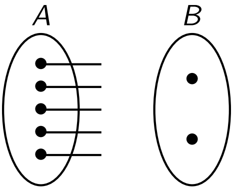
Considérons $\overline{G}$, le **complémentaire** de G.



Observons que, dans $\overline{G}$:

Cas 2. Donc maintenant A et B sont des cliques.

Considérons $\overline{G}$, le **complémentaire** de G.

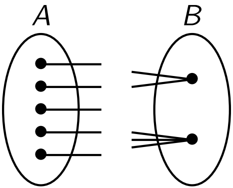


Observons que, dans $\overline{G}$:

- chaque sommet de A a exactement un voisin (dans B);

Cas 2. Donc maintenant A et B sont des cliques.

Considérons $\overline{G}$, le **complémentaire** de G.

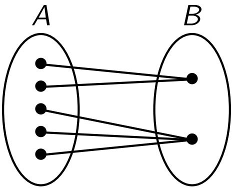


Observons que, dans $\overline{G}$:

- chaque sommet de A a exactement un voisin (dans B);
- chaque sommet de B a au moins deux voisins (dans A);

Cas 2. Donc maintenant A et B sont des cliques.

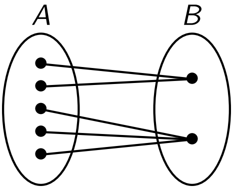
Considérons $\overline{G}$, le **complémentaire** de G.



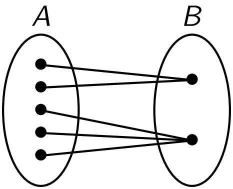
Observons que, dans $\overline{G}$:

- chaque sommet de A a exactement un voisin (dans B);
- chaque sommet de B a au moins deux voisins (dans A);
- toute composante connexe de $\overline{G}$ a au moins 3 sommets.

Considérons n'importe quel sous-ensemble $V' \subseteq V$ qui induit une composante connexe dans $\overline{G}$.

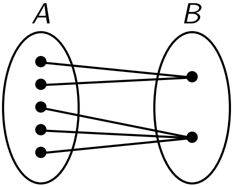


Considérons n'importe quel sous-ensemble $V' \subseteq V$ qui induit une composante connexe dans $\overline{G}$.



Supposons d'abord que $n' = |V'| < n$. Alors, $n' \geq 3$ et $n - n' \geq 3$.

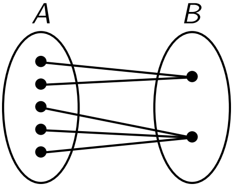
Considérons n'importe quel sous-ensemble $V' \subseteq V$ qui induit une composante connexe dans $\overline{G}$.



Supposons d'abord que $n' = |V'| < n$. Alors, $n' \geq 3$ et $n - n' \geq 3$.

Soit G_1 le sous-graphe de G induit par V' et G_2 le sous-graphe de G induit par $V \setminus V'$. Par le **Fait 2** on a $\mathcal{P}(G) = \mathcal{P}(G_1) \times \mathcal{P}(G_2)$.

Considérons n'importe quel sous-ensemble $V' \subseteq V$ qui induit une composante connexe dans $\overline{G}$.



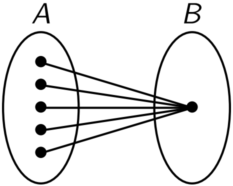
Supposons d'abord que $n' = |V'| < n$. Alors, $n' \geq 3$ et $n - n' \geq 3$.

Soit G_1 le sous-graphe de G induit par V' et G_2 le sous-graphe de G induit par $V \setminus V'$. Par le **Fait 2** on a $\mathcal{P}(G) = \mathcal{P}(G_1) \times \mathcal{P}(G_2)$.

Par induction, $\mathcal{P}(G) \geq n'(n - n')$ ce qui mène à la contradiction:

$$\begin{aligned} n &\geq \mathcal{P}(G) \geq n'(n - n') = n + (n' - 1)n - n'^2 \\ &\geq n + (n' - 1)(n' + 3) - n'^2 = n + 2n' - 3 > n. \end{aligned}$$

Considérons n'importe quel sous-ensemble $V' \subseteq V$ qui induit une composante connexe dans $\overline{G}$.



Supposons d'abord que $n' = |V'| < n$. Alors, $n' \geq 3$ et $n - n' \geq 3$.

Soit G_1 le sous-graphe de G induit par V' et G_2 le sous-graphe de G induit par $V \setminus V'$. Par le **Fait 2** on a $\mathcal{P}(G) = \mathcal{P}(G_1) \times \mathcal{P}(G_2)$.

Par induction, $\mathcal{P}(G) \geq n'(n - n')$ ce qui mène à la contradiction:

$$\begin{aligned} n &\geq \mathcal{P}(G) \geq n'(n-n') = n + (n'-1)n - n'^2 \\ &\geq n + (n'-1)(n'+3) - n'^2 = n + 2n' - 3 > n. \end{aligned}$$

Donc $n' = n$ et $\overline{G}$ est connexe. Ce qui implique $G \simeq K_{n-1} \cup K_1$. ■