Dimensions en théorie des modèles et d'autres sujets mathématiques

Quentin Brouette

Université de Mons

Mars 2017

Exemple

Soit E un K-espace vectoriel, on dit que x est linéairement dépendant sur $\{x_1, \ldots, x_n\}$ ssi $x \in \langle x_1, \ldots, x_n \rangle$.

Définition (Relation de dépendance)

Soit E un ensemble. Une relation binaire $R \subseteq E \times \mathscr{P}(E)$ est appelée relation de dépendance sur E si les conditions suivantes sont satisfaites (on dit que y est dépendant sur X quand $(y, X) \in R$)

- Si $x \in X$, alors x est dépendant sur X.
- (Finitude) Si y dépendant sur X alors il existe $x_1, \ldots, x_n \in X$ tel que y dépendant sur $\{x_1, \ldots, x_n\}$.
- (Transitivité) Si z est dépendant sur Y et tout élément de Y est dépendant sur X, alors z est dépendant sur X.
- (**Propriété d'échange**) Si y dépendant sur $\{x_1, \ldots, x_n\}$ mais pas sur $\{x_2, \ldots, x_n\}$ alors x_1 est dépendant sur $\{y, x_2, \ldots, x_n\}$.

On dit que X est indépendant ssi $\forall x \in X$, x est indépendant sur $X \setminus \{x\}$.

Bases

Soit E muni d'une relation de dépendance.
$X \subseteq$ est dit générateur ssi $\forall y \in E$, y est dépendant sur X.

Définition (Base)

X est une base de E ssi X est indépendant et X est générateur.

Proposition 1

Soit $X \subseteq E$, LASSE

- *X est maximal indépendant*
- *X est minimal générateur de E*
- *X est une base de E*

Dimension

Soit E muni d'une relation de dépendance.

Théorème 2 (Lemme de Zorn et propriété d'échange)

- *E possède une base $B \subseteq E$.*
- *Si B et C sont des bases de E alors $|B| = |C|$.*

Définition

Soit B une base de E, $\dim(E) := |B|$.

La clôture algébrique en théorie des modèles

Soit M une $\mathcal{L}$-structure, ϕ formule et $a_i \in M$.
Notation : $\phi(M, a_1, \dots, a_n) := \{x \in M : M \models \phi(x, a_1, \dots, a_n)\}$.

Définition

Soit M une $\mathcal{L}$-structure, $A \subseteq M$, $\mathrm{acl}(A) := \{x \in M :$ il existe ϕ , $a_1, \dots, a_n \in A$ tels que $\phi(M, a_1, \dots, a_n)$ est fini et contient $x\}$.

La relation donnée par $R(x, A)$ ssi $x \in \mathrm{acl}(A)$ ne satisfait pas toujours la propriété d'échange !

Corps algébriquement clos

Soit $(K, +, \cdot, 0, 1)$ algébriquement clos, $A \subseteq K$, on a $\mathrm{acl}(A) = A^{alg} :=$ clôture algébrique du corps engendré par A.

Lemme 3

Dans K, acl a la propriété d'échange :
Si $x \in \mathrm{acl}(A, a) \setminus \mathrm{acl}(A)$ alors $a \in \mathrm{acl}(A, x)$.

x est indépendant de A ssi $x \notin A^{alg}$ ssi x est transcendant sur A.
$\dim(K)$ donnée par cette relation de dépendance est le **degré de transcendance** de K (sur A).

$$degtr(\mathbb{Q}(\sqrt{2})/\mathbb{Q}) = 0 \qquad degtr(\mathbb{R}/\mathbb{Q}) = 2^{\aleph_0}$$

$$degtr(\mathbb{C}/\mathbb{R}) = 0 \qquad degtr(\mathbb{Q}(\pi, e)/\mathbb{Q}) = 1 \text{ ou } 2?$$

$$degtr(\mathbb{Q}(\pi)/\mathbb{Q}) = 1$$

$$degtr(\mathbb{Q}(\sqrt{2})/\mathbb{Q}) = 0$$
$$degtr(\mathbb{C}/\mathbb{R}) = 0$$
$$degtr(\mathbb{Q}(\pi)/\mathbb{Q}) = 1$$
$$degtr(\mathbb{R}/\mathbb{Q}) = 2^{\aleph_0}$$
$$degtr(\mathbb{Q}(\pi, e)/\mathbb{Q}) = 1 \text{ ou } 2?$$

Théorème 4 (Lindemann-Weierstrass)

Si des nombres algébriques $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ sont linéairement indépendants sur $\mathbb{Q}$, alors $e^{\alpha_1}, \ldots, e^{\alpha_n}$ sont algébriquement indépendantes sur $\mathbb{Q}$.
Autrement dit, $degtr(\mathbb{Q}(e^{\alpha_1}, \ldots, e^{\alpha_n})/\mathbb{Q}) = n$.

Structures fortement minimales

Définition (Fortement minimal)

$(M, \ldots)$ est fortement minimale ssi

- M est infini
- pour tout $N \equiv M$, pour tout $a_1, \ldots, a_n \in N$ et tout ϕ, $\phi(N, a_1, \ldots, a_n)$ est fini ou cofini.

Exemples :

- Ensembles infinis (dans le langage vide).
- $(K, +, \cdot, 0, 1)$ algébriquement clos
- $(V, +, 0, \{\lambda \cdot\}_{\lambda \in K})$ où V est un K-espace vectoriel infini.

Lemme 5

Dans les structures fortement minimales, acl *a la propriété d'échange.*

Conjecture 6 (Trichotomie, Zilber vers 1980)

Si M est fortement minimale, alors une des affirmations suivantes est vraie :

- *M est* **triviale** *dans le sens que* acl *est triviale (dans une extension élémentaire) pour tout ensemble $A \subseteq M$ on a $\mathrm{acl}(A) = \cup_{a \in A} \mathrm{acl}(\{a\})$.*
- *M est bi-interprétable avec un* **corps algébriquement clos**.
- *M est essentiellement un* **espace vectoriel** *: après avoir éventuellement ajouté des constantes dans M, M est bi-interprétable avec un groupe infini G t.q. tout sous-ensemble définissable de G^n est une combinaison booléenne de classes latérales de groupes définissables.*

Théorème 7 (Hrushovski 1988)

Il existe une structure fortement minimale qui ne respecte pas la trichotomie.

o-minimalité et dimension topologique

Définition (o-minimal)

$(M, <, \dots)$ est o-minimale ssi

- M un ordre dense sans extrémité.
- pour tout M, pour tout $a_1, \dots, a_n \in M$ et tout ϕ, $\phi(M, a_1, \dots, a_n)$ est une union finie d'intervalles et de singletons.

Exemples :

- $(\mathbb{Q}, <, +)$
- $(\mathbb{R}, <, +, \cdot)$
- $(\mathbb{R}, <, +, \cdot, \exp)$

$(\mathbb{R}, <, +, \cdot, \sin)$ n'est pas o-minimale.

Lemme 8

Dans les structures o-minimales, acl *a la propriété d'échange.*

Dimension topologique

Soit M une structure o-minimale $|A|^+$-saturée.

Définition

Soit $\bar{a} \in M^n$, $\dim(\bar{a}/A) :=$ min longueur $\bar{a}' \subseteq \bar{a}$ tel que $\bar{a} \in \mathrm{acl}(\bar{a}', A)$.
Soit $X \subseteq M^n$, A-définissable, $\dim(X/A) := \max_{\bar{a} \in X} \dim(\bar{a}/A)$.

Définition

Soit $X \subseteq M^n$, $\dim_t(X) \geq k$ ssi il existe projection $p : M^n \to M^k$ telle que $p(X)$ est d'intérieur non vide dans M^k.

Lemme 9

Si $X \subseteq M^n$ est A-définissable, alors $\dim(X/A) = \dim_t(X)$.

Théorème 10 (Trichotomie, Peterzil & Starchenko 1998)

Pour $a \in M$, a est trivial ou a possède un voisinage sur lequel M induit un espace vectoriel ou un corps réel clos.

Dimension en géométrie algébrique

Soit K un corps **algébriquement clos**, I un idéal de $K[X_1, \dots, X_n]$.
$V(I) := \{(x_1, \dots, x_n) \in K^n : \forall p \in I, p(x_1, \dots, x_n) = 0\}$.

- On peut supposer que I est radical ($\forall p$, $k \in \mathbb{N}$, si $p^k \in I$ alors $p \in I$).
- $V(I)$ sont les fermés d'une topologique sur K^n : Topologie de Zariski.

$V(I)$ est irréductible ssi I est premier.

Définition (Dimension pour la topologie de Zariski)

Soit X un espace topologique.
$\dim_Z X := \max\{k \in \mathbb{N} : \text{ il existe } X_i \text{ fermés irréd tq. } X_0 \subsetneq X_1 \subsetneq \cdots \subsetneq X_k\}$.

$\dim_H V(I) \in \mathbb{N}$.

Théorème 11

Soit K algébriquement clos.
$\dim_Z V(I) = degtr(\Gamma(V)/K)$ *où* $\Gamma(V) := Frac\ K[X_1, \dots, X_n]/I$

Bibliographie

P. M. Cohn, *Algebra vol 3*, John Wiley & Sons, 1991

L. van den Dries, *Tame topology and o-minimal structures*, Cambridge university press, 1998

E. Hrushovski, *A new strongly minimal set*, Annals of pure and applied Logic 62 (1993), 147-166.

D. Perrin, *Géométrie algébrique, une introduction*, EDP Sciences - CNRS Editions, 2001

Y. Peterzil, S. Starchenko, *A trichotomy theorem for o-minimal structures*, Proc London Math Soc (1998) 77 (3), 481-523.